

# 1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 1.1 1. Ordnung

$$\frac{dH}{dt} = v_0 - \frac{H(t)}{\tau}$$

Eine Lösung davon

$$H(t) = (H_0 - v_0\tau) \frac{-t}{\tau} + v_0\tau$$

## 1.2 Fließgleichgewicht

Für eine Funktion  $F$ , bei

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

# 2 Vektoranalysis

## 2.1 Satz von Gauss

$$\iint_A \operatorname{div} v \, dA = \oint_C v \, dr$$

Flächenintegral der Divergenz von  $v =$  Fluss von  $v$  durch Rand  $C$

## 2.2 Satz von Stokes

$$\iint_A \operatorname{rot} v \, dA = \iint_A \xi \, dA = \oint_C v \, ds$$

Flächenintegral der Rotation von  $v =$  Linienintegral von  $v$  entlang  $C$  (Zirkulation)

### Bsp

Für eine Vorticity-Disk mit  $\xi = \xi_0$ ,  $r = 2R$  soll  $u_\varphi$  bei  $r = 4R$  berechnet werden.

Der Satz von Stokes liefert:

$$\xi_0 \cdot (2R)^2 \pi = \int_0^{2\pi} u_\varphi \cdot 4R \cdot d\varphi$$

nach  $u_\varphi$  auflösen:  $u_\varphi = \frac{1}{2} \xi_0 R$

## 2.3 Koordinatentransformation

Wir verwenden meistens geographische Koordinaten.

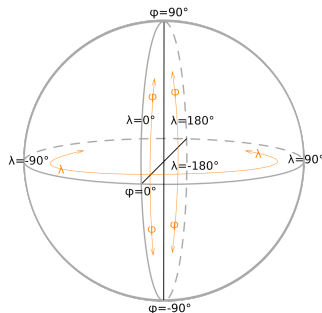


Figure 1: Geographisches Koordinatensystem

Wir definieren für Kugelkoordinaten einen Würfel mit:

$$dx = h_1 da$$

$$dy = h_2 db$$

$$dz = h_3 dc$$

wobei jeweils  $\vec{e}_x = \vec{e}_a$  etc.

Aus dem obigen folgen mit dem Satz von Gauss:

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial a} (u h_2) + \frac{\partial}{\partial b} (v h_1) \right)$$

Analog mit dem Satz von Stokes:

$$\xi = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\tan \varphi}{r} u$$

Der letzte Term folgt aus der Produktregel!

# 3 Matrixmethoden

## 3.1 Equilibrium

Setze  $\frac{df_i}{dn_j} = 0$  und löse Gleichungssystem

## 3.2 Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial n_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial n_k} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte  $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$  wobei  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda = x + iy$

- $x < 0$  für alle  $\lambda_i$ : stabil
- $x = 0$  für mindestens ein  $\lambda_i$ : kann neutral sein
- $x > 0$  für mindestens ein  $\lambda_i$ : instabil
- $y > 0$  für mindestens ein  $\lambda_i$ : Oszillation um Equilibrium
- $x$  ist die Konvergenz-/Divergenz-Rate zum/vom Equilibrium
- $1/y$  ist die Periode der Oszillation

## 3.3 SIR-Modell

SIR: Susceptible-Infected-Recovered

### 3.3.1 Single-Strain SIR

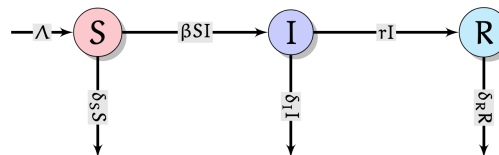


Figure 2: SIR-Modell

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \delta_S S - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \delta_I I - rI$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - \delta_R R$$

$\Lambda$ : Geburten- oder Immigrationsrate

$\delta_S, \delta_I, \delta_R$ : Sterberaten der jeweiligen (Teil-)populationen

$r$ : Erholungsrate von  $I$

$\beta SI$ : Mass-action Infektionsrate

- Disease-free equilibrium:

$$S_f = \Lambda/\delta_S, I_f = 0, R_f = 0$$

- Endemic equilibrium:

$$S = \frac{\delta_I + r}{\beta}, I_e = \frac{\Lambda}{\delta_I} - \frac{\delta_S}{\beta}, R_e = \frac{r}{\delta_R} \left( \frac{\Lambda}{\delta_I + r} - \frac{\delta_S}{\beta} \right)$$

Für das Disease-free equilibrium ergeben sich die Eigenwerte aus

$$(-\delta_S - \lambda) \left( \frac{\beta \Lambda}{\delta_S} - \delta_I - r - \lambda \right) (-\delta_R - \lambda) = 0$$

also

- $\lambda_1 = -\delta_S$
- $\lambda_2 = -\delta_R$
- $\lambda_3 = \frac{\beta \Lambda}{\delta_S} - \delta_I - r$

### Reproduktionszahl $R_0$

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda}{\delta_S (\delta_I + r)} = \frac{\beta S_f}{\delta_I + r}$$

- $R_0 > 1$ : Ausbreitung
- $R_0 < 1$ : Aussterben

### 3.3.2 Multi-Strain SIR

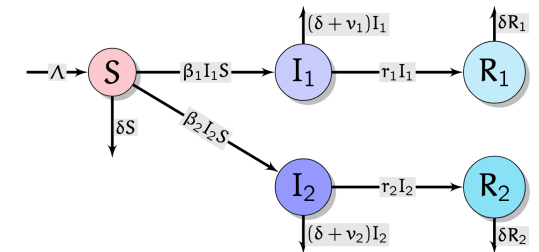


Figure 3: SIR-Modell mit zwei verschiedenen Erregern

Invasion von Strain (2), wenn  $R_0^{(1)} < R_0^{(2)}$

## 4 Oszillation

### 4.1 Reibungsfrei

$$\underbrace{\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2}}_{\text{Beschleunigung Luftpaket}} + \underbrace{N^2 \Delta z}_{\text{rücktreibende Kraft}} = 0$$

wobei  $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$  die Brunt-Väisälä-Frequenz

Mögliche Lösungen davon

$$\Delta z(t) = A \sin(Nt)$$

$$\Delta z(t) = B \cos(Nt)$$

$$\Delta z(t) = C \sin(Nt) + D \cos(Nt)$$

$$\Delta z(t) = E \sin(Nt + \delta)$$

oder in komplexer Schreibweise (Euler-Identität)

$$\Delta z(t) = A e^{iNt}$$

### 4.2 Mit Reibung

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} + N^2 \Delta z + k \frac{D \Delta z}{Dt} = 0$$

Lösung mit Ansatz  $\Delta z(t) = A e^{i\omega t}$ , führt zu

$$\omega^2 - ik\omega - N^2 = 0$$

also  $\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(ik \pm \sqrt{4N^2 - k^2})$  und somit

$$\Delta z(t) = A \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\sqrt{4N^2 - k^2}t\right)$$

## 5 Wellengleichung

### 5.1 1D-Welle

Für die Amplitude  $\psi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator ist. Somit im 1D-Fall

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Eine Lösung davon

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin[k(x - ct)]$$

wobei  $k$  die Wellenzahl und  $\omega$  die Kreisfrequenz ist. Es gilt  $c = \frac{\omega}{k}$ , was gerade der Phasengeschwindigkeit entspricht.

Wir beobachten für  $c > 0$  eine Verschiebung des Wellenmusters in positiver x-Richtung.

#### 5.1.1 Kennzahlen

Phasengeschwindigkeit  $v_p = c = \frac{\omega}{k}$

Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Periode  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

### 5.1.2 Wellenüberlagerung

Für die Gruppengeschwindigkeit zweier überlagerter Wellen mit  $k_1 \neq k_2$  und  $\omega_1 \neq \omega_2$  gilt

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

Dispersion tritt auf, falls  $v_g \neq v_p$  (in der Praxis meist der Fall)

### 5.2 2D-Welle

Für eine Linie konstanter Phase

$$kx + ly - \omega t = \text{const.}$$

Die Ausbreitung verläuft senkrecht auf diese Linien, was entlang dem Wellenvektor  $\vec{h}$  entspricht.

#### 5.2.1 Kennzahlen

Für die Wellenlängen gilt

$$\lambda_x = 2\pi/k, \lambda_y = 2\pi/l$$

bzw. die Wellenlänge entlang der Ausbreitung

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

Der Wellenvektor ist

$$\vec{h} = (k, l)$$

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

### 5.3 Komplexer Wellenansatz

- 1D:  $A e^{i(kx - \omega t)}$
- 2D:  $A e^{i(kx + ly - \omega t)}$
- 3D:  $A e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$

## 6 Transportgleichung

Sei  $\phi(x, y, z, t)$  ein physikalisches Feld mit Punkten  $P(x, y, z)$  über die Zeit.

### 6.1 Euler'sche Perspektive

Beobachtung am Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  wird gemessen:

$$\phi^E(t) = \phi(x_0, y_0, z_0, t)$$

Die zeitliche Änderung

$$\dot{\phi}^E(t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, y_0, z_0, t)$$

### 6.2 Lagrange'sche Perspektive

Messung wird "mitgetragen", entlang einer Trajektorie  $\vec{x}(t)$

$$\phi^L(t) = \phi(x(t), y(t), z(t), t)$$

Die zeitliche Änderung (materielle Ableitung)

$$\dot{\phi}^L(t) = \frac{D}{Dt} \phi = \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi$$

Wobei  $\vec{u}$  z.B. die Strömungsgeschwindigkeit ist

### 6.3 Beliebiger Pfad

Als Beispiel bewegen wir uns in einem Flugzeug mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_F$ , dann gilt für die Veränderung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_F = \frac{D \phi}{Dt} + (\vec{v}_F - \vec{u}) \cdot \nabla \phi$$

### 6.4 Quellen und Senken

Langrange'sche Perspektive

$$\frac{D \phi}{Dt} = s$$

Analog für Euler

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = s - \vec{u} \cdot \nabla \phi$$

Man Beachte den Advektionsterm  $\vec{u} \cdot \nabla \phi$ !

## 7 Folgen und Reihen

Folge:  $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$

Reihe:  $\{s_n\} = s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$ , wobei

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

### 7.1 Bildungsgesetze

**Explizit**  $a_n$  kann direkt berechnet werden, z.B.  $a_n = n$

**Rekursiv**  $a_n$  wird als Funktion von  $a_{n-1}$  angegeben, z.B.

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

### 7.2 Arithmetische Folge

### 7.3 Geometrische Folge

Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, a_n = a_1 q^{n-1}$$

Daraus folgt die **geometrische Reihe**

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

für  $|q| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \frac{1}{1 - q}$$

### 7.4 Fraktale Geometrie

- $R$  = Anzahl Teillängen
- $P$  = Löcher/Poren
- $F$  = Anzahl Felder (1D:  $R$ , 2D:  $R^2$ , 3D:  $R^3$ ) -  $P$

#### 7.4.1 Hausdorff-Dimension

Für Betrachtungen geometrischer Objekte mit Seitenlängen  $N(R)$  gilt

$$D = \frac{\log F}{\log R}$$

Wenn  $D$  nicht ganzzahlig  $\rightarrow$  Fraktal

#### 7.4.2 Präfraktale

Als Präfraktale werden Fraktale einer bestimmter Ordnung verstanden. Ordnung 5 entspricht 5 Bildungsschritten. Ein ideales Fraktal besteht aus unendlich solcher Schritte. Ordnung 1 entspricht dem **Generator**.

## 7.5 Anwendung in der Bodenphysik

### 7.5.1 Wassersättigung

$$\Theta = \frac{\theta(h)}{\theta_s} = \left(\frac{h_b}{h}\right)^\lambda$$

## 8 Taylor-Reihe

An der Stelle  $a$  einer Funktion  $f(x)$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

## 9 Operatoren

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\operatorname{rot} u_{xy} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{rot} u_{xyz} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

## Copyleft



Dieses Dokument ist unter (CC BY-SA 3.0) freigegeben

<https://n.ethz.ch/~jannisp>

<https://git.thisfro.ch/thisfro/mathematik-v-zf>

Jannis Portmann, FS21

## Referenzen

1. Skript zur Vorlesung

## Bildquellen

- Abb. 1: E(nix) & ttog,  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Geographische\\_Koordinaten#/media/Datei:Geographic\\_coordinates\\_sphere.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Geographische_Koordinaten#/media/Datei:Geographic_coordinates_sphere.svg)
- Abb. 2, 3: Vorlesungsunterlagen